УДК 517.929

В. С. Тарасян

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ОДНОЙ МОДЕЛИ ФРЕЗЕРОВАНИЯ

Введение

При математическом моделировании процессов фрезерования металлов установлена существенная роль запаздывания при описании взаимодействия резца с обрабатываемой деталью [1–5]. Вопросам качественного исследования математических моделей фрезерования посвящены работы [2, 4–8]. Для математических моделей фрезерования, описываемых линейным дифференциальным уравнением с периодическими коэффициентами и постоянным запаздыванием, предложены методы исследования устойчивости, которые требуют использования вычислительных алгоритмов при построении областей устойчивости в пространстве параметров [9–12].

В нашей работе изучается линейная модель фрезерования, описываемая дифференциальным уравнением с периодическими коэффициентами и кусочно-постоянным аргументом. Дифференциальные уравнения с кусочно-постоянными аргументами изучались, например, в работах [13–21]. Они принадлежат классу дифференциальных уравнений с последействием. В описании эволюционных свойств решений дифференциальных уравнений с последействием используются функциональная трактовка решений [22] и понятие оператора монодромии [23]. В этом подходе для асимптотической устойчивости периодического дифференциального уравнения с последействием необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа оператора монодромии по модулю были меньше единицы [23]. При исследовании устойчивости линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами и кусочно-постоянным запаздыванием, описывающего модель фрезерования, мы существенно опираемся на результаты работы [24], в которой изучается класс дифференциальных уравнений с конечномерными операторами, включающий рассматриваемую нами модель. В предложенной модели оператор монодромии конечномерен. Это дает возможность записать условия асимптотической устойчивости в аналитической форме. Для построения проекций областей асимптотической устойчивости на отдельные плоскости в пространстве параметров использовался пакет аналитических вычислений «Mathematica».

1. Постановка задачи

Рассматривается линейная модель фрезерования, описываемая дифференциальным уравнением с кусочно-постоянным аргументом

$$\ddot{y}\,(t) + \frac{2\xi\Delta}{\nu}\dot{y}\,(t) + \frac{\Delta^2}{\nu^2}y\,(t) = \frac{\mu\Delta^2}{\nu^2}V\,(t)\,(y\,([t-1]) - y\,([t]))\,, \tag{1}$$

$$t \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty),$$

где y – отклонение глубины резания от номинального значения в направлении подачи детали; ν, ξ, μ, Δ – положительные параметры, определяемые конструкцией системы, $0 < \xi < 1$, $\Delta = 2\pi/n$, n – число зубьев фрезы, $n > 2$; V – периодическая функция с периодом, равным 1, определяемая формулой $V\,(t) = 1 - \varepsilon\cos\left(2\,\Delta\,t + \delta\right)$ при $0 < t < 1$, где ε и δ – положительные параметры. Здесь $[a]$ обозначает целую часть числа a.

Требуется в пространстве параметров рассматриваемой модели фрезерования найти области асимптотической устойчивости уравнения (1).

2. Построение общего решения

При помощи замены переменных $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$ преобразуем дифференциальное уравнение (1) второго порядка в систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{\Delta^2}{\nu^2}x_1(t) - \frac{2\,\xi\,\Delta}{\nu}x_2(t) + \frac{\mu\,\Delta^2}{\nu^2}V\,(t)\,(x_1\,([t-1]) - x_1\,([t]))\,, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Введем обозначения

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\Delta^2}{\nu^2} & -\frac{2\,\xi\,\Delta}{\nu} \end{pmatrix}, \quad Z\,(t) = \frac{\mu\,\Delta^2}{\nu^2}V\,(t)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

и запишем систему в векторной форме:

$$\dot{x}\,(t) = Ax\,(t) + Z\,(t)\,x\,([t-1]) - Z\,(t)\,x\,([t])\,. \tag{2}$$

Перейдем к специальной форме описания систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянным аргументом [24]:

$$\dot{x}\,(t) = Ax\,(t) + \sum_{k=-M+1}^{N-1} A_k\,(t)\,\chi_{(t_k, t_{k-1}+r]}\,(t)\,x\,(t_k)\,, \tag{3}$$

где $x \in C([-r,\omega),\mathbb{R}^2)$; A_k, $k = \overline{-M+1,N}$, – интегрируемые по Лебегу ω-периодические матричные функции; $t_k \in [-r,\omega]$, $k = \overline{-M+1,N-1}$; χ_E – индикаторная функция множества E.

Найдем соответствие между двумя формами описания. Имеем $M = 2$, $N = 2$, $\omega = 1$, $r = 3$, $t_{-1} = -1$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1$. На интервале $t \in (0,1)$ уравнение (3) примет вид

$$\dot{x}\left(t\right) = Ax\left(t\right) + A_{-1}\left(t\right)x\left(-1\right) + A_0\left(t\right)x\left(0\right).$$

На этом же промежутке уравнение (2) примет вид

$$\dot{x}\left(t\right) = Ax\left(t\right) + Z\left(t\right)x\left(-1\right) - Z\left(t\right)x\left(0\right), \quad t \in (0,1).$$

Тогда матричные функции A_{-1}, A_0, A_1 можно записать в виде

$$A_{-1}\left(t\right) = Z\left(t\right), \quad A_0\left(t\right) = -Z\left(t\right), \quad A_1\left(t\right) = 0, \quad t \in (0,1).$$

Фундаментальная матрица системы имеет вид

$$\Phi\left(t\right) = e^{-\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\beta t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\beta t & \frac{\nu}{\Delta\sqrt{1-\xi^2}}\sin\beta t \\ -\frac{\Delta}{\nu\sqrt{1-\xi^2}}\sin\beta t & \cos\beta t - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\beta t \end{pmatrix},$$

где $\alpha = \frac{\Delta\xi}{\nu}$, $\beta = \frac{\Delta}{\nu}\sqrt{1-\xi^2}$. Используя методику работы [24], находим на отрезке $[0,1]$ представление решения системы (3) с начальным моментом $t_0 = 0$ и начальной функцией $\varphi \in C\left([-1,0],\mathbb{R}^2\right)$:

$$x\left(t,\varphi\right) = R_{-1}\left(t\right)\varphi\left(-1\right) + R_0\left(t\right)\varphi\left(0\right), \quad t \in [0,1]. \tag{4}$$

Здесь $R_{-1}\left(t\right) = \Phi\left(t\right)\widetilde{B}_{-1}(t)$, $R_0\left(t\right) = \Phi\left(t\right)\left(\widetilde{B}_0(t) + I_2\right)$,

$$\widetilde{B}_k(t) = \int_0^t \Phi^{-1}(s)A_k(s)\chi_{(t_k,t_{k-1}+3]}\left(s\right)ds, \quad k = -1,0, \quad t \in [0,1].$$

Учитывая определение матричных функций A_k, $k = -1,0$, получим

$$\widetilde{B}_{-1}(t) = \int_0^t \Phi^{-1}(s)A_{-1}(s)\chi_{(-1,1]}\left(s\right)ds = \int_0^t \Phi^{-1}(s)Z(s)\,ds,$$

$$\widetilde{B}_0(t) = \int_0^t \Phi^{-1}(s)A_0(s)\chi_{(0,2]}\left(s\right)ds = -\int_0^t \Phi^{-1}(s)Z(s)\,ds.$$

В результате мы нашли представление общего решения системы (2) на отрезке $[0,1]$.

3. Характеристическое уравнение оператора монодромии

Условия асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1) совпадают с условиями асимптотической устойчивости системы (2). Для асимптотической устойчивости системы (2) необходимо и достаточно, чтобы собственные числа оператора монодромии U, действующего в функциональном пространстве $C\left([-1,0],\mathbb{R}^n\right)$, были по модулю меньше единицы. Оператор монодромии определяется формулой [23]

$$(U\varphi)(\vartheta) = x\,(1+\vartheta,\varphi)\,, \quad \vartheta \in [-1,0]\,, \quad \varphi \in C([-1,0],\mathbb{R}^n).$$

Учитывая представление общего решения (4), имеем $W_0 = R_0(1+\vartheta)$, $W_{-1} = R_{-1}(1+\vartheta)$, $\vartheta \in [-1,0]$. Тогда

$$(U\varphi)(\vartheta) = W_0\,(\vartheta)\,\varphi\,(0) + W_{-1}\,(\vartheta)\,\varphi\,(-1)\,, \quad \vartheta \in [-1,0]\,, \quad \varphi \in C([-1,0],\mathbb{R}^2).$$

Характеристическое уравнение для оператора монодромии записывается в виде

$$\det\begin{pmatrix} W_{-1}\,(-1) - \lambda\, I_2 & W_0\,(-1) \\ W_{-1}\,(0) & W_0\,(0) - \lambda\, I_2 \end{pmatrix} = 0, \tag{5}$$

где

$$W_{-1}(-1) = R_{-1}\,(0) = \Phi\,(0)\,\widetilde{B}_{-1}(0) = 0,$$
$$W_{-1}(0) = R_{-1}\,(1) = \Phi\,(1)\,\widetilde{B}_{-1}(1),$$
$$W_0\,(-1) = R_0\,(0) = \Phi\,(0)\left(\widetilde{B}_0(0) + I_2\right) = I_2,$$
$$W_0\,(0) = R_0\,(1) = \Phi\,(1)\left(\widetilde{B}_0(1) + I_2\right).$$

Уравнение (5) может быть преобразовано к виду

$$\lambda\left(\lambda^3 + a\,\lambda^2 + b\lambda + c\right) = 0. \tag{6}$$

Коэффициенты характеристического уравнения определяются формулами

$$a = a_0 + \varepsilon a_1, \quad b = b_0 + \varepsilon b_1, \quad c = c_0 + \varepsilon c_1,$$

где

$$a_0 = -\frac{e^{-\alpha}}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\mu\,\xi\,\sin\beta + \mu - e^{-\alpha}(2+\mu)\cos\beta;$$

$$a_1 = \frac{e^{-\alpha}\mu}{\left((1+4\nu^2)^2 - 16\nu^2(1-\xi^2)\right)} \times \Big(\cos\beta\big((1-4\nu^2)\cos\delta + 4\nu\xi\sin\delta\big) -$$
$$- e^{\alpha}\big((1-4\nu^2)\cos(\delta+2\Delta) + 4\nu\xi\sin(\delta+2\Delta)\big)\Big) +$$
$$+ \frac{e^{-\alpha}\mu\sin\beta}{\sqrt{1-\xi^2}\left((1+4\nu^2)^2 - 16\nu^2(1-\xi^2)\right)} \times$$

$$\times\Big(\big(1+4\nu^2\big)\xi\cos\delta+2\nu\big(1+4\nu^2-2\big(1-\xi^2\big)\big)\sin\delta\Big);$$

$$b_0=2\frac{e^{-\alpha}\mu\xi\sin\beta}{\sqrt{1-\xi^2}}+e^{-2\alpha}\big(1+\mu-e^{2\alpha}\mu\big);$$

$$\begin{aligned}b_1={}&\frac{e^{-2\alpha}\mu}{\sqrt{1-\xi^2}\Big(\big(1+4\nu^2\big)^2-16\nu^2(1-\xi^2)\Big)}\times\\&\times\Big(-2e^{\alpha}\cos\Delta\sin\beta\big((1+4\nu^2)\xi\cos(\delta+\Delta)+\\&+2\nu\big(1+4\nu^2-2(1-\xi^2)\big)\sin(\delta+\Delta)\big)+\\&+\sqrt{1-\xi^2}\big(-\big(1-4\nu^2\big)\cos\delta-4\nu\xi\sin\delta+\\&+e^{2\alpha}\big(\big(1-4\nu^2\big)\cos(\delta+2\Delta)+4\nu\xi\sin(\delta+2\Delta)\big)+\\&+2e^{\alpha}\cos\beta\sin\Delta\big(4\nu\xi\cos(\delta+\Delta)-\big(1-4\nu^2\big)\sin(\delta+\Delta)\big)\big)\Big);\end{aligned}$$

$$c_0=e^{-2\alpha}\mu(e^{\alpha}\cos\beta-1)-\frac{e^{-\alpha}\mu\xi\sin\beta}{\sqrt{1-\xi^2}};$$

$$\begin{aligned}c_1={}&\frac{e^{-\alpha}\mu\sin\beta}{\sqrt{1-\xi^2}\Big(\big(1+4\nu^2\big)^2-16\nu^2(1-\xi^2)\Big)}\times\\&\times\big((1+4\nu^2)\xi\cos(\delta+2\Delta)+2\nu\big(1+4\nu^2-2(1-\xi^2)\big)\sin(\delta+2\Delta)\big)+\\&+\frac{e^{-2\alpha}\mu}{\big(1+4\nu^2\big)^2-16\nu^2(1-\xi^2)}\Big((1-4\nu^2)\cos\delta+4\nu\xi\sin\delta-\\&-e^{\alpha}\cos\beta\big((1-4\nu^2)\cos(\delta+2\Delta)+4\nu\xi\sin(\delta+2\Delta)\big)\Big).\end{aligned}$$

В результате мы нашли коэффициенты характеристического уравнения.

4. Условия асимптотической устойчивости математической модели фрезерования

Для характеристического уравнения (6), переходя от проблемы Раусса–Гурвица для единичного круга к аналогичной проблеме для левой полуплоскости, находим условия асимптотической устойчивости уравнения (1) в терминах коэффициентов уравнения (6).

Теорема. *Для того чтобы уравнение* (1) *было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$\begin{aligned} &3+a-b-3c>0, \quad 3-a-b+3c>0,\\ &1-a+b-c>0, \quad 1+ac-b-c^2>0. \end{aligned} \tag{7}$$

Запись условий асимптотической устойчивости уравнения (1) в терминах исходных параметров модели ν, ξ, μ, Δ, ε, δ может быть выполнена с помощью неравенств (7) и формул, определяющих коэффициенты a, b, c через исходные параметры системы. В силу их громоздкости они не приводятся. Полученные аналитические условия асимптотической устойчивости позволяют строить проекции областей устойчивости в пространстве исходных параметров с помощью пакета аналитических вычислений «Mathematica».

Предложенный метод позволяет выполнять анализ устойчивости процесса при различных сочетаниях параметров, в том числе при $\varepsilon > 0$. На приведенных ниже рис. 1, 2 сплошной заливкой показаны проекции областей асимптотической устойчивости на плоскость параметров ν, μ при указанных значениях других параметров.

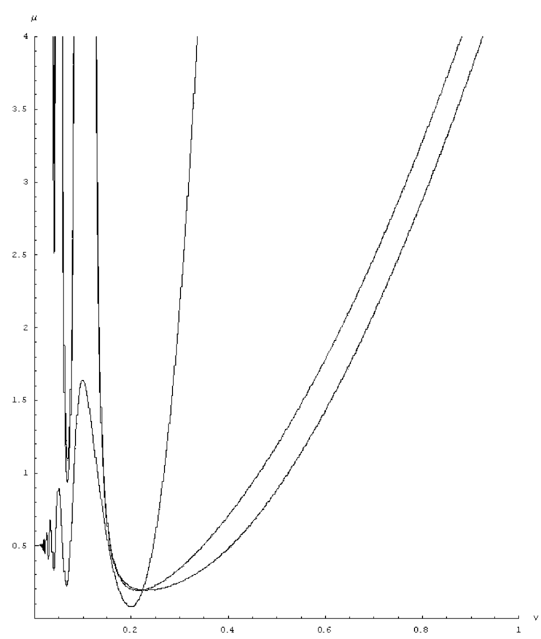

Рис. 1. Проекция области асимптотической устойчивости на плоскость параметров ν и μ при $\varepsilon = 0$, $\xi = 0.10$, $n = 10$

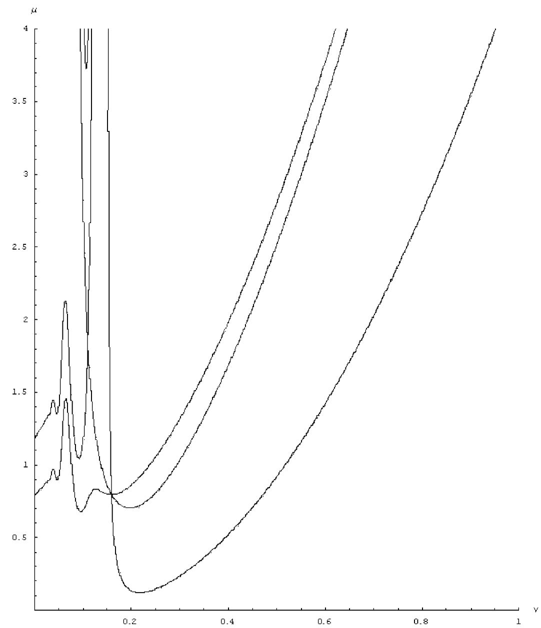

Рис. 2. Проекция области асимптотической устойчивости на плоскость параметров ν и μ при $\varepsilon = 5$, $\xi = 0.30$, $n = 10$

Литература

1. Hohn R. E., Long G. W., Sridhar R. A general formulation of the milling process equation. Contribution to machine tool chatter research. 5 // J. Engineering Industry Trans. ASME. Ser. B. 1968. Vol. 90, № 2. P. 102–110.

2. Зарс В. В. Моделирование автоколебаний металлорежущих станков // Вопросы динамики и прочности. Рига: Зинатне, 1969. Вып. 18. С. 157–173.

3. Зорев Н. Н. Вопросы механики процесса резания металлов. М.: Машгиз, 1956.

4. Эльясберг М. Е. Основы теории автоколебаний при резании металлов // Станки и инструменты. 1962. № 10. С. 3–8.

5. Хижняк В. Н. О стесненной регенерации автоколебаний резца // Вопросы динамики и прочности. Рига: Зинатне, 1969. Вып. 18. С. 175–180.

6. Эльясберг М. Е. Об устойчивости процесса резания металлов // Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 9. С. 37–52.

7. Stepan G. Stability investigation of retarded differential equations // Acta Technica Academial Scientarium Hungarical. 1980. Vol. 90, № 1–2. P. 109–132.

8. Матвеев В. Н. Исследование колебаний резца при обработке металлов в рамках одной математической модели // Исследования по устойчивости и колебаниям. Ярославль, 1979. С. 41–62.

9. Hohn R. E., Long G. W., Sridhar R. A stability algorithm for a special case of the milling process. Contribution to machine tool chatter research. 6 // J. Engineering Industry Trans ASME. Ser. B. 1968. Vol. 90, № 2. P. 111–116.

10. Hohn R. E., Long G. W., Sridhar R. A stability algorithm for the general milling process. Contribution to machine tool chatter research. 7 // Ibid. P. 116–120.

11. Шильман С. В. Метод производящих функций в теории динамических систем. М.: Наука, 1973.

12. Долгий Ю. Ф. Устойчивость периодических дифференциально-разностных уравнений. Свердловск: УрГУ, 1996.

13. Симонов П. М. О некоторых динамических моделях макроэкономики // Экономическая кибернетика: математические и инструментальные методы анализа, прогнозирования и управления. Пермь: Перм. гос. ун-т, 2002. С. 213–231.

14. Симонов П. М. О некоторых динамических моделях микроэкономики // Вестн. ПГТУ. Математика и прикладная математика. 2002. № 3. С. 53–74.

15. Alonso A., Hong J., Rojo J. A class of ergodic solutions of differential equations with piecewise constant arguments // Dynam. Systems Appl. 1998. Vol. 7, № 4. P. 561–574.

16. Grace S. R., Rulenovich M. R. S., El-Metwally H. On the stability of solutions of certain systems of differential equations with piecewise constant argument // Czehosl. Math. J. 2002. Vol. 52, № 3. P. 449–461.

17. Liu P., Golpalsamy K. Global stability and chaos in a population model with piecewise constant arguments // Appl. Math. Comput. 1999. Vol. 101, № 1. P. 63–88.

18. Wang J. Y. Oscillatory properties of neutral functional differential equations with piecewise constant arguments // Math. Theor. and Appl. 2001. Vol. 21, № 1. P. 57–61.

19. Wiener J., Lakshmikantham V. A Lamped oscillator with piecewise constant time delay // Nonlinear Stud. 2000. Vol. 7, № 1. P. 78–84.

20. Yuan Rong. On a class of singularly perturbed differential equations with piecewise constant argument // Sci. China. Ser. A. 2002. Vol. 45, № 4. P. 484–502.

21. Cooke K. L., Wiener J. Retarded differential equations with piecewise constant delays // J. Math. Anal. Appl. 1984. Vol. 93. P. 265–297.

22. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.

23. Шиманов С. Н. Устойчивость линейных систем с периодическими коэффициентами и запаздыванием. Свердловск: Изд-во Урал. ун-та, 1983.

24. Тарасян В. С. Периодические системы дифференциальных уравнений с конечномерными операторами // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2002. № 4. С. 67–91.